

Laplace oder Nicht-Laplace? – Das ist hier die Frage!

Modellierungsoffene vs. deterministische Sichtweise bei einstufigen Zufallsexperimenten

KARIN BINDER, MÜNCHEN, STEFAN KRAUSS, REGENSBURG UND SIMON WEIXLER, MÜNCHEN

Zusammenfassung: Das berühmte Würfelproblem des Chevalier de Méré (siehe z. B. Kütting & Sauer, 2011) verdeutlicht die zentrale Bedeutung von Ergebnismenge und zugeordneten Wahrscheinlichkeiten bei der Modellierung von mehrstufigen Zufallsexperimenten. Doch schon bei einstufigen Zufallsexperimenten kann die Festlegung einer Ergebnismenge problematisch sein, wie im vorliegenden Artikel erläutert wird. In der Fachliteratur und in Schulbüchern finden sich zwei unterschiedliche Sichtweisen auf Ergebnismengen bei einstufigen Zufallsexperimenten: Wir unterscheiden diesbezüglich zwischen einer modellierungsoffenen Sichtweise, wenn multiple Ergebnismengen (unterschiedlicher Mächtigkeit) zugelassen werden, und der deterministischen Sichtweise, wenn die Ergebnismenge als eindeutig festgelegt betrachtet wird. Ob ein Zufallsexperiment als Laplace-Experiment angesehen wird oder nicht, hängt bei der modellierungsoffenen Sichtweise also von der Festlegung der Ergebnismenge ab! Bei der deterministischen Sichtweise hingegen gibt es diese Offenheit nicht. Der vorliegende Beitrag soll für die Problematik sensibilisieren, dass bei einer modellierungsoffenen Sichtweise der Übergang von Laplace-Experimenten zu Nicht-Laplace-Experimenten fließend ist. Im Speziellen sollen unter Bezug auf Glücksräder, Kartenspiele und Spielwürfel Anregungen gegeben werden, wie Schülerinnen und Schüler dabei unterstützt werden können, ein tieferes Verständnis für die Rolle der Modellbildung bei Zufallsexperimenten zu entwickeln. Ein zentraler Bestandteil ist dabei die Einsicht, dass bei einem Zufallsexperiment oftmals unterschiedliche Modellierungen vorgenommen werden können, von denen manche zum Schluss „Laplace-Experiment“ führen, andere hingegen nicht.

1 Einleitung

In Schulbüchern findet man im Themengebiet der Laplace-Experimente häufig Aufgaben, wie in Abb. 1 dargestellt. Beim abgebildeten Glücksrad drängen sich möglicherweise auf den ersten Blick die verschiedenen Farben der Felder und somit als Ergebnismenge $\Omega = \{\text{weiß; grau; schwarz}\}$ auf. Genauso gut kann sich allerdings auch die Anzahl der Felder aufdrängen und entsprechend eine Ergebnismenge, die nicht drei Elemente beinhaltet, sondern

acht (die auch nicht weiter ausdifferenziert werden können). Die zentrale Frage lautet diesbezüglich: Welches Merkmal muss bei der Festlegung der Ergebnismenge eines einstufigen Zufallsexperiments herangezogen werden? Muss bei dem in Abb. 1 dargestellten Glücksrad also die Anzahl der Felder betrachtet werden oder müssen die verschiedenen Farben der Felder betrachtet werden? Oder darf jedes der beiden Merkmale herangezogen werden?

Gib die Ergebnismenge an.

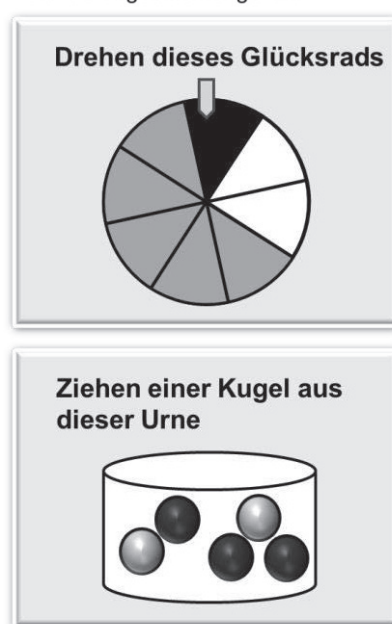


Abb. 1: Zufallsexperimente mit diskussionswürdiger Ergebnismenge

Diese Problematik bei der Festlegung der Ergebnismenge ergibt sich beispielsweise analog bei der in Abb. 1 dargestellten Urne: Muss die Anzahl der Kugeln betrachtet werden oder müssen die Farben der Kugeln betrachtet werden? Oder darf wiederum jedes der beiden Merkmale herangezogen werden?

2 Zufallsexperimente und die Rolle der Modellbildung

Die Antwort auf die obige Frage hängt von der Sichtweise auf Ergebnismengen ab. Die Festlegung der Ergebnismenge erfolgt im Rahmen der Modellbildung bei Zufallsexperimenten (zentrale Begriffe werden im Kasten auf Seite 4 erläutert).

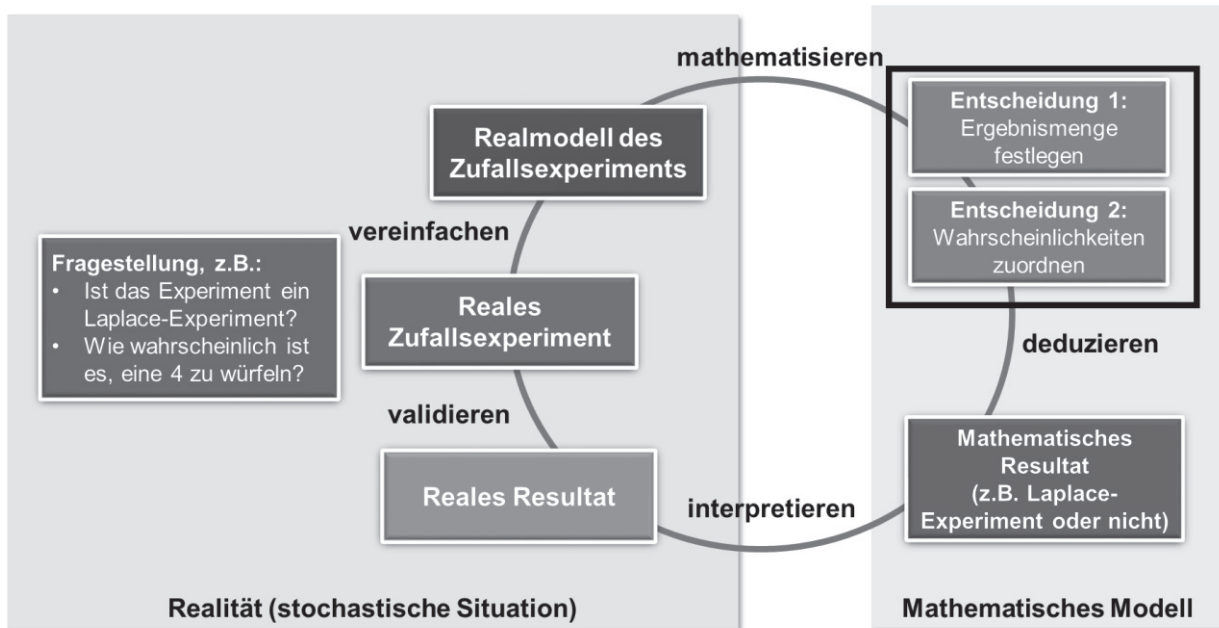


Abb. 2: Modellierungskreislauf zur Betrachtung von Zufallsexperimenten; im Fokus des vorliegenden Artikels stehen die beiden Entscheidungen 1 und 2 (schwarz umrahmt).

Hierzu soll ein an Blum und Leiss (2005) angelehnter Modellierungskreislauf vorgestellt werden (siehe Abb. 2; inspiriert durch Krüger, Sill & Sikora, 2015, S. 13 und 16 und Eichler & Vogel, 2009, S. 236), anhand dessen die verschiedenen Schritte betrachtet werden können, die bei der Modellierung von Zufallsexperimenten idealtypisch vorgenommen werden müssen.

Ausgangspunkt ist ein reales Zufallsexperiment, welches vereinfacht beispielsweise als Werfen eines Spielwürfels identifiziert wird (Realmodell des Zufallsexperiments). Zum Vereinfachungsprozess gehört unter anderem die Festlegung, der Spielwürfel soll nicht vom Tisch fallen und auch die Idealisierung des Objekts (d. h. die Betrachtung des Würfels als ideales gedankliches Konstrukt, Büchter & Henn, 2007).

Mit der Fokussierung eines Merkmals, beispielsweise basierend auf einer Fragestellung, beginnt die Mathematisierung und damit der Übergang zu einem mathematischen Modell. Beim Werfen eines gewöhnlichen Spielwürfels drängt sich vermutlich zumeist das Merkmal *Augenzahl* und damit die Ergebnismenge $\Omega_1 = \{1;2;3;4;5;6\}$ auf (Entscheidung 1). Der Fokus kann aber auch auf einem anderen Merkmal als der Augenzahl liegen: Interessiert man sich beispielsweise dafür, welches Maß der Winkel hat, den die vordere Würfelkante mit der Tischkante ein-

nimmt, so erweist sich die kontinuierliche Ergebnismenge $\Omega_2 = [0^\circ;45^\circ]$ als zweckmäßig (Büchter & Henn, 2007; vgl. Abb. 3). Die zugehörige Fragestellung kann und sollte also durchaus das fokussierte Merkmal und die diesbezügliche Ergebnismenge beeinflussen.



Abb. 3: Wie groß ist das Maß des Winkels, den die vordere Würfelkante mit der Tischkante einnimmt (Büchter & Henn, 2007)?

Im Rahmen von „Entscheidung 1“ sollten alle zuvor getroffenen Modellannahmen berücksichtigt werden. Wird der Spielwürfel beispielsweise nicht auf einer harten Unterlage geworfen, sondern auf einem Hochflorteppich, so sollten bei Fokussierung des Merkmals *Augenzahl* zusätzlich die Ergebnisse „Kante oben“ und „Ecke oben“ Berücksichtigung finden.

Wissenswertes:

Unter einem Laplace-Experiment versteht man ein Zufallsexperiment¹ mit endlicher Ergebnismenge², bei dem alle Ergebnisse³ gleich wahrscheinlich sind (Eichler & Vogel, 2009; Dehling & Haupt, 2006; Mittag & Schüller, 2020). Aus dieser Definition geht bereits hervor, wie eng Laplace'sche Zufallsexperimente mit der zugehörigen Ergebnismenge verknüpft sind und auch mit den Wahrscheinlichkeiten, die den einzelnen Ergebnissen (und damit den einzelnen Elementen der Ergebnismenge) zugeordnet werden. Denn erst mit der konkreten Angabe einer Ergebnismenge kann die Frage nach der diskreten Gleichverteilung beantwortet werden und entschieden werden, ob es sich um ein Laplace-Experiment handelt oder nicht (vgl. auch Engert-Oostingh, Borovcnik & Fuchs, 2017).

Auf diese Weise kann ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) modelliert werden, der aus der gewählten Ergebnismenge Ω und einer zugehörigen Wahrscheinlichkeitsfunktion P besteht, welche den einzelnen Elementen der Ergebnismenge, und damit auch jedem Ereignis, entsprechende Wahrscheinlichkeiten zuordnet. Die Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten ist deshalb unabdingbar, weil die Festlegung der Ergebnismenge alleine noch nicht hinreichend ist, um eine Entscheidung für oder gegen ein Laplace-Experiment zu treffen, wie nachfolgendes Beispiel in Abb. 4 illustriert.

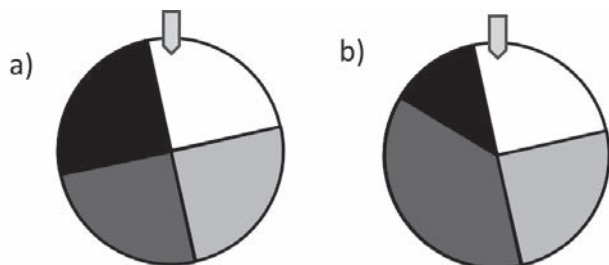


Abb. 4: Zwei Glücksräder, eine Ergebnismenge

Für beide Glücksräder kann als Ergebnismenge $\Omega = \{\text{weiß; hellgrau; dunkelgrau; schwarz}\}$ gewählt werden (Merkmal: Farbe der Segmente). Aber lediglich bei Glücksrad a) würde man den einzelnen Elementen der Ergebnismenge auch die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnen und folgern, dass ein Laplace-Experiment vorliegt. Erst wenn die Festlegung der Ergebnismenge *und* die Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den einzelnen Elementen der Ergebnismenge erfolgt ist (oder zumindest eine Aussage getroffen werden kann, ob eine Gleichverteilung vorliegt oder nicht), kann entschieden werden, ob von einem Laplace-Experiment gesprochen werden sollte oder nicht.

Im Rahmen der Modellbildung muss unter Umständen auch entschieden werden, welche Wahrscheinlichkeiten den einzelnen Ergebnissen zugeordnet werden, beispielsweise um entscheiden zu können, ob das betreffende Zufallsexperiment als Laplace-Experiment angesehen werden kann oder nicht. Diese Zuordnung kann in einem Zug mit der Festlegung der Ergebnismenge geschehen, im Schema in Abb. 2 wird sie als „Entscheidung 2“ dargestellt. Nachdem das mathematische Resultat im Kontext interpretiert und in ein reales Resultat überführt wird, können im Rahmen eines Validierungsprozesses die eingangs getroffenen Modellannahmen erneut kritisch geprüft werden.

3 Zwei Sichtweisen auf Ergebnismengen – der unausgesprochene Konflikt

Doch welche Ergebnismenge muss nun bei den beiden Zufallsexperimenten in Abb. 1 angegeben werden? Müssen die einzelnen Felder im Glücksrad oder Kugeln in der Urne gedanklich durchnummeriert werden oder ist eine solche künstliche „Unterscheidbarmachung“ gleichfarbiger Felder oder Kugeln unzulässig? In der Fachliteratur sowie in Schulbüchern scheinen bezüglich dieser Fragestellung zwei Sichtweisen bei einstufigen Zufallsexperimenten zu existieren, die im Folgenden vorgestellt werden. Diese beiden Sichtweisen betreffen die Eindeutigkeit von Ergebnismengen. Die Problematik unterschiedlicher Sichtweisen bei *einstufigen* Zufallsexperimenten wird in der Literatur – unseres Wissens nach – bislang nicht explizit thematisiert und dieser unausgesprochene Konflikt kann die Arbeit von Lehrkräften im Stochastikunterricht unnötig erschweren.

Sichtweise 1 beschreibt eine Haltung, die die *Rolle der Modellbildung* in den Vordergrund rückt und vielfältige Ergebnismengen zulässt. Wir nennen diese Sichtweise daher im Folgenden *modellierungs-offene Sichtweise*. Eine solche Sichtweise findet sich beispielsweise in Büchter und Henn (2007) oder Kütting und Sauer (2011) und erlaubt verschiedene Modellierungen eines Zufallsexperiments in folgender Weise: Beim Werfen eines Spielwürfels ist die Ergebnismenge *nicht* deterministisch festgelegt durch $\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Vielmehr sind auch andere Modellierungen zulässig wie beispielsweise die Ergebnismenge $\Omega_2 = \{\text{gerade Zahl; ungerade Zahl}\}$ oder $\Omega_3 = \{6; \text{keine } 6\}$ (vgl. auch Büchter & Henn, 2007; Kütting & Sauer, 2011).

Ein entsprechendes Beispiel für eine modellierungs-offene Sichtweise zeigt Abb. 5 aus einem Schulbuch (vgl. Lambacher Schweizer 8, Mathematik für Gymnasien, Bayern, 2009). Die Abhängigkeit von der Ergebnismenge wird im abgebildeten Schulbuchauszug

Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißt **Ergebnismenge**. Sie wird mit Ω bezeichnet. Die einzelnen Ergebnisse bezeichnet man mit $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$.

Beim Würfeln wählt man meist als Ergebnismenge $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Sind bei einem Würfel die Seitenflächen mit geraden Zahlen blau, die mit ungeraden Zahlen rot gefärbt und interessieren wir uns nur für die gewürfelte Farbe, so wählen wir als Ergebnismenge $\Omega = \{\text{blau; rot}\}$ oder $\Omega = \{\text{gerade; ungerade}\}$. Die Wahl einer passenden Ergebnismenge hängt also vom betrachteten Merkmal (z. B. Zahl oder Farbe) ab.

Abb. 5: Modellierungsoffene Sichtweise auf Ergebnismengen

Die möglichen **Ergebnisse** beim Werfen eines Würfels sind 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Diese Ergebnisse werden im sogenannten **Ergebnisraum** Ω zusammengefasst: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Ein **Ereignis** fasst bestimmte Ergebnisse eines Zufallsexperiments zusammen.

Beispiel:

Die **günstigen Ergebnisse** für das Ereignis E: „Augenzahl ist kleiner als 5“ sind 1, 2, 3 und 4. Man schreibt $E = \{1; 2; 3; 4\}$. Ereignisse sind also Teilmengen des Ergebnisraums.

Abb. 6: Deterministische Sichtweise auf Ergebnismengen

explizit herausgearbeitet. Aber auch die Aussage „Beim Würfeln wählt man meist als Ergebnismenge [...]“ deutet die Möglichkeit einer Variation der Ergebnismenge bereits an.

Sichtweise 2 – die wir im Folgenden als *deterministische Sichtweise* bezeichnen – beschreibt hingegen eine Haltung, die bis auf Isomorphie (d.h. die Elemente werden zwar anders benannt, die Mächtigkeit der Ergebnismenge ist aber identisch) nur *eine* Ergebnismenge zulässt. Diese Sichtweise zielt also auf eine eindeutige Festlegung der Ergebnismenge ab und beschränkt daher bewusst die möglichen Modellierungen. Beim Werfen eines Spielwürfels wären im Gegensatz zur modellierungsoffenen Sichtweise entsprechend die Ergebnismengen $\Omega_2 = \{\text{gerade Zahl; ungerade Zahl}\}$ und $\Omega_3 = \{6; \text{keine } 6\}$ nicht zulässig, da hier nicht alle möglichen (unterscheidbaren) Ergebnisse vollumfänglich repräsentiert werden. Der dahinterliegende Gedanke ist, dass ein Spielwürfel prinzipiell sechs Flächen hat, die oben liegen können, und diese somit als die möglichen Ergebnisse angesehen werden müssen. Betrachtungen wie die Frage „gerade Zahl vs. ungerade Zahl“ sind natürlich dennoch zulässig, werden aber mithilfe von Ereignissen erfasst, in denen Ergebnisse zusammengefasst werden. Auch wenn uns aus der Literatur keine Formulierung bekannt ist, in der die modellierungsoffene Sichtweise ganz explizit ausgeschlossen wird (im Sinne eines klaren Hinweises, Ω_2 oder Ω_3 dürfen nicht als Ergebnismenge angesehen werden), so finden sich doch Hinweise darauf, dass viele Autoren eher

die deterministische Sichtweise verfolgen. Ein Beispiel findet sich in Henze (2021), der für das Ziehen einer Karte aus einem Kartenstapel (französisches Blatt, 32 Karten) die Ergebnismenge $\Omega = \{\spadesuit 7; \spadesuit 8; \spadesuit 9; \spadesuit 10; \heartsuit B; \heartsuit D; \heartsuit K; \heartsuit A; \clubsuit 7; \clubsuit 8; \clubsuit 9; \clubsuit 10; \clubsuit B; \clubsuit D; \clubsuit K; \clubsuit A\}$ vorschlägt, gleichzeitig aber betont, dass die „Wahl von Ω meist bis zu einem gewissen Grad willkürlich [ist]“ und als *isomorphe* Ergebnismenge $\Omega = \{1; 2; 3; \dots; 30; 31; 32\}$ aufführt „wenn wir alle 32 Karten gedanklich in einer vereinbarten Weise durchnummerieren“. Neben Henze (2021) geben beispielsweise auch Mittag und Schüller (2020) sowie Fahrmeier et al. (2016) keine verschiedenen (d. h. nicht-isomorphen) Ergebnismengen an – zumindest für einstufige Zufallsexperimente.

Ein Beispiel für eine vermutlich deterministische Sichtweise aus einem Schulbuch (vgl. Pythagoras Mathematik 9, RS Bayern, 2021) zeigt Abb. 6.

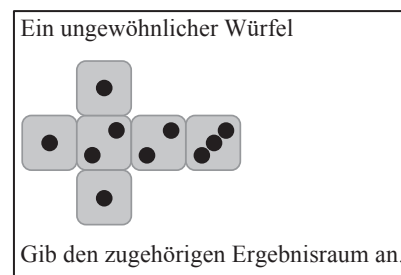


Abb. 7: Formulierung, die suggeriert, dass es eine eindeutige Festlegung der Ergebnismenge gibt

Weitere Beispiele in Schulbüchern für eine eher deterministische Sichtweise sind auch Formulierungen wie „Gib *die* Ergebnismenge für folgendes Zufallsexperiment an.“, die suggerieren, dass es eine eindeutige Festlegung der Ergebnismenge gibt. Abb. 7 zeigt hierzu ein Beispiel aus einem Schulbuch (vgl. Pythagoras Mathematik 9, Realschule Bayern, 2021).

Unstrittig scheint die Möglichkeit der Betrachtung alternativer Ergebnismengen in der Fachliteratur hingegen bei *zusammengesetzten* Zufallsexperimenten zu sein, wie dem einmaligen Werfen *zweier* gewöhnlicher Spielwürfel (vgl. z. B. Krengel, 2000; Georgii, 2015). Hier dominiert eine modellierungsoffene Sichtweise und es werden auch in Beiträgen, in denen bei einstufigen Zufallsexperimenten keine alternativen Ergebnismengen betrachtet wurden, nun mehrere Ergebnismengen (unterschiedlicher Mächtigkeit) zugelassen, die entweder die Augensumme fokussieren ($\Omega_1 = \{2; 3; \dots; 11; 12\}$) bzw. geordnete Paare ($\Omega_2 = \{(1;1); (1;2); (2;1); \dots; (6;6)\}$) oder ungeordnete Paare ($\Omega_3 = \{(1;1); (1;2); (2;2); \dots; (6;6)\}$).

4 Wie elementar ist ein Elementarereignis?

Bei den eingangs betrachteten Zufallsexperimenten in Abb. 2 stellte sich die Frage nach der Festlegung der Elementarereignisse, also den Elementen der Ergebnismenge. In der Literatur wird hierzu häufig geschrieben, Elemente der Ergebnismenge sollen *atomar*, also nicht weiter zerlegbar sein. Was dies genau bedeutet, soll anhand der beiden Urnen in Abb. 8 erläutert werden.

Betrachte die folgenden beiden Zufallsexperimente:
Aus Urne A oder aus Urne B wird eine Kugel gezogen.

Handelt es sich jeweils um ein Laplace-Experiment?
Ja oder Nein?

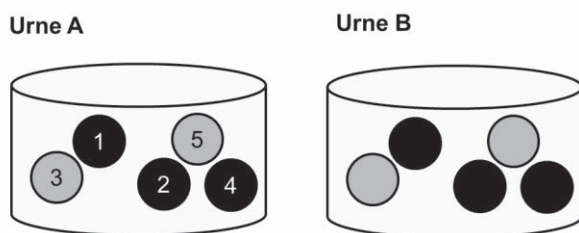


Abb. 8: Zwei Urnen-Aufgaben zur Unterscheidung von Laplace-Experimenten und Nicht-Laplace-Experimenten

Beim Ziehen einer Kugel aus Urne A, welche fünf Kugeln enthält, wäre die Ergebnismenge bei der deterministischen Sichtweise als $\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ festzulegen. Diese Ergebnismenge hat die Mächtigkeit 5, ihre Elemente sind diesbezüglich atomar. Bei

einer modellierungsoffenen Sichtweise wäre hingegen auch die Ergebnismenge $\Omega_2 = \{\text{grau}; \text{schwarz}\}$ zulässig, welche lediglich die Mächtigkeit 2 hat. Die Elemente dieser Ergebnismenge sind diesbezüglich nicht atomar, es könnte in Bezug auf „grau“ und „schwarz“ weiter ausdifferenziert werden.

Doch wie verhält es sich bei Urne B? Vertritt man die Auffassung, dass das Ziehen einer Kugel ein atomares Ergebnis ist, müssen die fünf Kugeln gedanklich unterscheidbar gemacht werden (z. B. analog zu Urne A durch gedankliches Durchnummerieren), so dass eine Ergebnismenge festgelegt werden kann, in die alle Kugeln einfließen. Die deterministische Sichtweise erfordert also in manchen Fällen eine „künstliche“ Unterscheidbarmachung. Insbesondere dann, wenn die Ergebnismenge nicht konkret notiert werden muss, erscheint es auch durchaus plausibel, dass beim Ziehen aus einer Urne mit fünf Kugeln die Ergebnismenge die Mächtigkeit 5 haben muss.

Da allerdings im Stochastikunterricht im Zusammenhang mit dem Urnenmodell explizit unterscheidbare und nicht unterscheidbare Kugeln *voneinander getrennt* werden, könnte es für Schülerinnen und Schüler als verwirrend empfunden werden, wenn die eigentlich nicht unterscheidbaren Kugeln hier „künstlich“ unterscheidbar gemacht werden müssen. Für Lernende ist bei Urne B vermutlich viel naheliegender, als Ergebnisraum $\Omega_2 = \{\text{grau}; \text{schwarz}\}$ zu formulieren.

Es finden sich diesbezüglich auch Beispiele für Schulbücher, die eigentlich eine deterministische Sichtweise verfolgen (d. h. nur eine Ergebnismenge zulassen), dann allerdings bei Urne B als Ergebnismenge $\Omega = \{\text{grau}; \text{schwarz}\}$ angeben; also gerade nicht die atomaren Ergebnisse auswählen. Diese Festlegung der Ergebnismenge halten wir für problematisch, weil sie in Bezug auf die ansonsten eingenommene Sichtweise inkonsistent ist.

5 Lösungsvorschlag: Betonung der Rolle der Modellbildung

Die Frage, aus welchen Elementen eine Ergebnismenge bestehen darf oder muss, stellt sich natürlich auch Lehrkräften im Stochastikunterricht. Diese sind oft damit konfrontiert, dass sich in Schulbüchern sowohl Aufgaben finden, die eher zu einer modellierungsoffenen Sichtweise passen, als auch solche, die eher der deterministischen Sichtweise entsprechen, was im Stochastikunterricht zu wenig lernförderlichen Inkonsistenzen führen kann.

Ein Bewusstsein für die Existenz der beiden beschriebenen, konkurrierenden Sichtweisen kann als gewinnbringendes Hintergrundwissen für Mathematiklehrkräfte dienen. Prinzipiell kann *jede der beiden*

Sichtweisen im Unterricht angenommen werden, wobei es empfehlenswert ist, bewusst nur *eine* dieser beiden Sichtweisen einzunehmen, weil eine andernfalls erforderliche Kontrastierung der Sichtweisen den inhaltlichen Rahmen (insbesondere in der Sekundarstufe I) sprengen könnte. Für den schulischen Stochastikunterricht empfiehlt sich aus unserer Sicht durchgehend und von Beginn an, also bereits bei einstufigen Zufallsexperimenten, eine *modellierungsoffene Sichtweise* – aufgrund der damit verbundenen Betonung der *Rolle der Modellbildung*.

6 Potential von Aufgaben

Gerade in Schulbüchern finden sich regelmäßig Aufgaben, in denen Zufallsexperimente beschrieben werden *ohne* Angabe einer konkreten Ergebnismenge, und Schülerinnen und Schülern wird die Frage gestellt, ob es sich um ein Laplace-Experiment handelt oder nicht (vgl. Abb. 9).

Betrachte das folgende Zufallsexperiment:
Aus der Urne wird eine Kugel gezogen.

Handelt es sich um ein Laplace-Experiment?
Ja oder Nein?

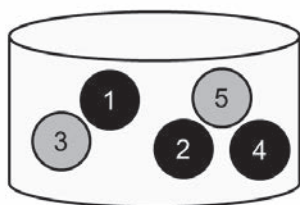


Abb. 9: Urnen-Aufgabe (Ziehen einer Kugel) zur Unterscheidung von Laplace-Experimenten und Nicht-Laplace-Experimenten

Unserer Erfahrung nach stellen derartige Aufgaben Schülerinnen und Schüler, aber manchmal auch Lehrkräfte, vor große Herausforderungen. Und dies ist auch nicht verwunderlich, weil sich die Frage nach dem Laplace-Experiment eben erst im Rahmen der *Modellierung* stellt und beantworten lässt, bei gleichzeitiger Betrachtung einer konkreten Ergebnismenge und den Wahrscheinlichkeiten, die den einzelnen Elementen der Ergebnismenge zugeordnet werden. In diesem Sinne zeigen wir im Folgenden, dass Aufgaben wie in Abb. 9 (Aufgaben dieser Art finden sich in vielen Schulbüchern) dennoch ein didaktisches Potential bereithalten, zu spannenden Diskussionen anregen können und zur besseren Unterscheidung von Laplace- und Nicht-Laplace-Experimenten dienen können.

Gemäß einer modellierungsoffenen Sichtweise sollte im Unterricht im Zusammenhang mit Laplace-Experimenten auf eine geeignete Sprechweise geachtet

und die Rolle der Modellbildung in den Vordergrund gerückt werden. Wo relevant, sollte klar herausgestellt werden, dass es nicht „die“ (im Sinne „einer“) Ergebnismenge gibt, sondern alternative Betrachtungen möglich und unter Umständen auch vorteilhafter sind. Die explizite Nutzung des Begriffs *Laplace-Modell* (vgl. z. B. Krüger, Sill & Sikora, 2015) kann hierbei unterstützend wirken.

Bei der Aufgabe aus Abb. 9 kann eine modellierungsoffene Sichtweise außerdem erreicht werden, indem statt der Fragestellung „Handelt es sich um ein Laplace-Experiment? Ja oder Nein?“ die beiden im Modellierungsprozess zu treffenden Entscheidungen und der sich ergebende Schluss durch ein schrittweises Vorgehen explizit gemacht werden. Dies kann beispielsweise wie folgt aussehen: „Gib eine Ergebnismenge an, die beim Ziehen einer Kugel aus der Urne betrachtet werden kann.“ bzw. „Finde, falls möglich, weitere Ergebnismengen, die beim Ziehen einer Kugel aus der Urne betrachtet werden können.“ (Entscheidung 1). Und dann für jede einzelne der betrachteten Ergebnismengen getrennt: „Lassen sich den einzelnen Elementen der Ergebnismenge gleiche Wahrscheinlichkeiten zuordnen? Begründe gegebenenfalls, warum nicht.“ (Entscheidung 2) sowie „Handelt es sich so betrachtet um ein Laplace-Experiment?“ (Deduzieren des mathematischen Resultats).

Eine mögliche Modellierung des Ziehens einer Kugel aus der Urne könnte folgendermaßen aussehen: Als mögliche Ergebnisse (Merkmal: Nummer auf den Kugeln) fließen „Kugel Nr. 1“, „Kugel Nr. 2“ usw. in die Ergebnismenge $\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ ein. Basierend auf der Annahme, dass jede der fünf Kugeln (unter bestimmten Voraussetzungen) mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen wird, wird jedem der fünf Elemente der Ergebnismenge die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeordnet. Beide Entscheidungen zusammen führen dann zum Schluss, dass es sich um ein Laplace-Experiment handelt.

Für dasselbe Zufallsexperiment des einmaligen Ziehens einer Kugel aus der Urne in Abb. 9 ist aber auch folgende, alternative Modellierung denkbar: Als mögliche Ergebnisse (Merkmal: Farbe der Kugeln) fließen „graue Kugel“ und „schwarze Kugel“ in die Ergebnismenge $\Omega_2 = \{\text{grau}; \text{schwarz}\}$ ⁴ ein. Da sich in der Urne mehr schwarze als graue Kugeln befinden, erscheint es nicht plausibel anzunehmen, dass eine graue Kugel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit wie eine schwarze Kugel gezogen wird. Wiederrum beide Entscheidungen zusammen führen nun zum Schluss, dass es sich *nicht* um ein Laplace-Experiment handelt.

Das didaktische Potential der Aufgabe sehen wir folglich darin, dass das Ziehen einer Kugel aus der

Urne auf verschiedene Arten modelliert werden kann („potentielle Variation der betrachteten Ergebnismenge“) und dabei erkennbar wird, dass es schlussendlich von der konkreten Modellierung abhängt, ob ein Zufallsexperiment als Laplace-Experiment angesehen wird oder nicht.

Bezogen auf die beschriebene Modellierung des Ziehens einer Kugel aus der Urne als Laplace-Experiment ($\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$) bietet sich weiterführend das Quantifizieren der Wahrscheinlichkeit an, welche den einzelnen Elementen der Ergebnismenge zugeordnet ist. Bei fünf möglichen Ergebnissen, die alle als gleich wahrscheinlich angesehen werden, beträgt die Wahrscheinlichkeit für jedes einzelne Element der Ergebnismenge $1/5$. Für diese Wahrscheinlichkeit bietet sich der Begriff *Laplace-Wahrscheinlichkeit* an (vgl. z. B. Büchter & Henn, 2007; Engert-Oostingh et al., 2017; Kütting & Sauer, 2011).

Der Ergebnismenge mit der größtmöglichen Mächtigkeit (in diesem Fall Ω_1) kommt hierbei eine besondere Bedeutung zu, weil sich die weiteren denkbaren Ergebnismengen durch eine Vereinigung einzelner Elemente der Ergebnismenge bilden lassen oder man alternativ *Ereignisse* aus den Ergebnissen bilden kann, um entsprechende Fragestellungen beantworten zu können. Somit erlaubt die Ergebnismenge mit größtmöglicher Mächtigkeit auch die Beantwortung der größten Anzahl an möglichen Fragestellungen.

7 Variation der betrachteten Ergebnismenge bei Glücksrädern

Bei einer modellierungsoffenen Sichtweise eröffnen Glücksräder reichhaltige Möglichkeiten zur Betrachtung von Laplace- und Nicht-Laplace-Experimenten.

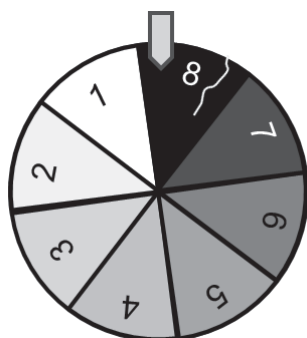


Abb. 10: Glücksrad als Diskussionsgrundlage für „Laplace-Experiment“ vs. „Nicht-Laplace-Experiment“ (mit Riss bei Feld 8)

Das Drehen des Glücksrads in Abb. 10 lässt sich beispielsweise auf zwei Arten modellieren, die beide zum Schluss führen, dass ein Laplace-Experiment vorliegt. Als Elementarereignisse fließen hierzu in

die Ergebnismenge entweder die acht unterscheidbaren Farben ein ($\Omega_1 = \{\text{weiß; sehr helles Grau; ... ; dunkelgrau; schwarz}\}$) oder äquivalent dazu die Zahlen, die auf den acht kongruenten Sektoren („Feldern“) abgebildet sind ($\Omega_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$). Bei beiden Ergebnismengen Ω_1 und Ω_2 ist die zugehörige Laplace-Wahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit für jedes der acht Felder, dass der Zeiger darauf stehen bleibt, $1/8$.

Welchen Einfluss die Entscheidung für eine Ergebnismenge im Modellierungsprozess haben kann, wird an folgendem Beispiel deutlich: Betrachtet man die Ergebnismenge $\Omega_1 = \{\text{weiß; sehr helles Grau; ... ; dunkelgrau; schwarz}\}$, so eignet sich diese Ergebnismenge nicht zur Beantwortung der Frage: „Wie wahrscheinlich ist es, dass der Zeiger auf dem mit der Zahl 3 beschrifteten Feld stehen bleibt?“ Umgekehrt eignet sich die Betrachtung der Ergebnismenge $\Omega_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ nicht zur Beantwortung der Frage „Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt der Zeiger auf dem schwarzen Feld stehen?“ Ein Blick auf die interessierende Fragestellung ist also durchaus sinnvoll, *bevor* entschieden wird, welche Ergebnisse (hier: die acht unterscheidbaren Farben vs. die Zahlen, die auf den acht kongruenten Sektoren abgebildet sind) letztlich als Elementarereignisse in die Ergebnismenge einfließen.

Der Einfluss der Entscheidung für die zugeordneten Wahrscheinlichkeiten im Modellierungsprozess kann anhand des folgenden Beispiels thematisiert werden: Betrachtet man das Glücksrad in Abb. 10 genauer, ist als Besonderheit festzustellen, dass das mit der Zahl 8 beschriftete schwarze Feld einen Sprung aufweist (entstanden durch das viele Drehen), wohingegen alle anderen Felder unversehrt zu sein scheinen. Ob man nun bei Betrachtung der Ergebnismengen Ω_1 und Ω_2 weiterhin von gleichen Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Elementarereignisse ausgehen möchte, lässt sich zumindest diskutieren. Geht man nicht mehr von gleichen Wahrscheinlichkeiten aus, so führt dies zum Schluss, dass es sich auch *nicht* (mehr) um ein Laplace-Experiment handelt. Der Übergang von a-priori-Überlegungen (d. h. *vor* Durchführung des Zufallsexperiments) hin zu a-posteriori-Überlegungen (d. h. *nach* Durchführung des Zufallsexperiments) und einem frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff bietet sich hier an. Analoge Betrachtungen lassen sich übrigens bei der Modellierung der Zufallsexperimente *einmaliges* Werfen eines gezinkten Spielwürfels – wer einen solchen „Schwerpunktwürfel“ schon einmal selbst in Händen gehalten hat, kann Zweifel an der Annahme gleicher Wahrscheinlichkeiten nachvollziehen – oder *einmaliges* Werfen einer verbogenen Münze anstellen (vgl. Schilling & Krüger, 2022).

Zurück zum Glücksrad mit Sprung und hin zu weiterführenden Erkenntnissen basierend auf den beiden beschriebenen Modellierungen (Ergebnismengen Ω_1 und Ω_2), die beide – unter der Annahme, dass der Sprung keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeiten hat – zu dem Schluss führen, es liegt ein Laplace-Experiment vor. Wenn man nun an der Antwort auf die Frage „Lande ich auf einem Feld mit (bzw. ohne) Sprung?“ interessiert ist, dann wäre es naheliegend, als Elementarereignisse die beiden Ergebnisse „Das Feld, auf dem der Zeiger stehen bleibt, hat einen Sprung“ und „Das Feld, auf dem der Zeiger stehen bleibt, hat keinen Sprung“ in die Ergebnismenge $\Omega_3 = \{\text{Sprung; kein Sprung}\}$ einfließen zu lassen (Entscheidung 1). Da alle Felder ohne Sprung zusammen einen viel größeren Sektor bilden als das eine Feld mit Sprung, erscheint es jedoch nicht plausibel anzunehmen, dass der Zeiger mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf dem Feld mit Sprung wie auf einem der Felder ohne Sprung stehen bleibt (Entscheidung 2). Als Schluss ergibt sich, dass kein Laplace-Experiment vorliegt und folglich auch keine Laplace-Wahrscheinlichkeit angegeben werden kann. Trotzdem lassen sich Wahrscheinlichkeiten für die beiden Elementarereignisse „Sprung“ und „kein Sprung“ ableiten. Dies gelingt aus Erkenntnissen der bereits erfolgten Modellierungen (Ergebnismengen Ω_1 und Ω_2), genauer den diesbezüglich bestimmten Laplace-Wahrscheinlichkeiten. Da das Feld mit Sprung das schwarze Feld (bei Betrachtung von Ω_1) bzw. das mit der Zahl 8 beschriftete Feld ist (bei Betrachtung von Ω_2), welchem die Laplace-Wahrscheinlichkeit $1/8$ zugeordnet ist, ergibt sich als Wahrscheinlichkeit $P(\text{Sprung}) = 1/8$ und folglich $P(\text{kein Sprung}) = 1 - 1/8 = 7/8$. Derartige Überlegungen können auch als „Sprungbrett“ dienen hin zur Betrachtung von anderen Ereignissen als Elementarereignissen im Sinne von Teilmengen der Ergebnismenge, welche mehr als nur ein einziges Element beinhalten. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Das Feld, auf dem der Zeiger stehen bleibt, hat keinen Sprung“ lässt sich dann mithilfe der *Laplace-Formel* berechnen als Wert des Quotienten Anzahl günstiger Fälle (7 Felder ohne Sprung) durch die Anzahl aller möglichen Fälle (8 Felder). Zusammengefasst lässt sich die Frage nach der Wahrscheinlichkeit $P(\text{kein Sprung})$ also beantworten, indem entweder das Gegenereignis zu einem Elementarereignis oder ein anderes Ereignis als ein Elementarereignis betrachtet wird.

Vielleicht interessiert auch die Antwort auf eine andere Frage, nämlich ob das Feld, auf dem der Zeiger stehen bleibt, in schwarzer Farbe (Felder 1 bis 6) oder weißer Farbe (Felder 7 und 8) beschriftet ist. Auch hierzu gibt es wieder eine naheliegende Betrachtung: die Ergebnismenge $\Omega_4 = \{\text{Schriftfarbe Schwarz; Schriftfarbe Weiß}\}$.

Wie an diesen kurzen Beispielen deutlich wird, sind bei Glücksrädern vielfältige Fragestellungen denkbar, zu deren Beantwortung zumeist die Betrachtung unterschiedlicher Ergebnismengen möglich ist, wobei manche Betrachtungen vorteilhafter sind als andere. Eine Variation der betrachteten Ergebnismenge in Aufgabenstellungen (vgl. Abb. 11) stellt zweifelsfrei eine Bereicherung des Stochastikunterrichts dar, welche Schülerinnen und Schülern zu einem besseren Verständnis der Rolle der Modellbildung bei Zufallsexperimenten verhelfen kann. Erst durch die Betrachtung multipler Ergebnismengen kann erkannt werden: Welche Ergebnismengen eignen sich zur Beantwortung einer bestimmten Fragestellung und welche nicht? Welche Betrachtungen erweisen sich hierbei als vorteilhafter als andere? Insbesondere sollte Schülerinnen und Schülern bewusst werden, wie wichtig der Blick auf die Aufgabenstellungen ist, bevor sie festlegen, welche Ergebnisse sie in die Ergebnismenge einfließen lassen.

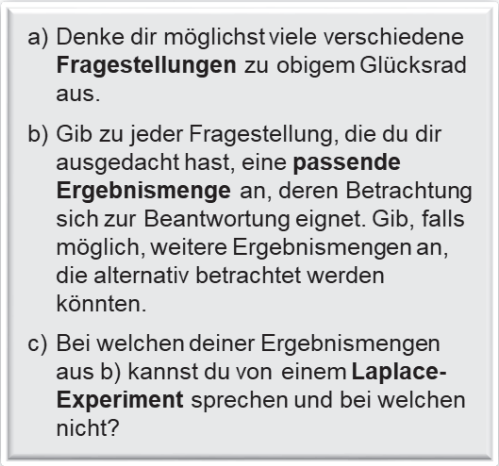
- 
- Denke dir möglichst viele verschiedene **Fragestellungen** zu obigem Glücksrad aus.
 - Gib zu jeder Fragestellung, die du dir ausgedacht hast, eine **passende Ergebnismenge** an, deren Betrachtung sich zur Beantwortung eignet. Gib, falls möglich, weitere Ergebnismengen an, die alternativ betrachtet werden könnten.
 - Bei welchen deiner Ergebnismengen aus b) kannst du von einem **Laplace-Experiment** sprechen und bei welchen nicht?

Abb. 11: Mögliche Aufgabenstellungen für Schülerinnen und Schüler zum Glücksrad aus Abb. 10

Es bleibt noch die Frage, ob es denn empfehlenswert wäre, die Ergebnismenge stets so genau und konkret wie möglich anzugeben, damit später *alle* denkbaren Fragestellungen beantwortet werden können? Eine solche Ergebnismenge würde dann bezogen auf das Glücksrad mit Sprung gemäß den vorherigen Überlegungen wie folgt aussehen: $\Omega_5 = \{1\text{-weiß-kein Sprung-Schriftfarbe Schwarz; } 2\text{-sehr helles Grau-kein Sprung-Schriftfarbe Schwarz; } \dots ; 8\text{-schwarz-Sprung-Schriftfarbe Weiß}\}$. Interessiert man sich anschließend aber nur für die Frage „Wie wahrscheinlich ist es, dass der Zeiger auf einem mit einer geraden Zahl beschrifteten Feld stehen bleibt?“ war die zuvor aufwändig formulierte Ergebnismenge unnötig detailliert. Zur Beantwortung reicht $\Omega_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ vollkommen aus. Ein Blick auf die konkreten Fragestellungen ist also unabdingbar, bevor eine Ergebnismenge formuliert wird.

Allerdings hängt die Wahl einer geeigneten Ergebnismenge nicht nur von den Fragestellungen ab, die später betrachtet werden sollen, sondern auch vom Vorwissen und dem Leistungsstand der Lernenden. Während manche Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf die jeweilige Fragestellung zielgerichtet eine knapp formulierte Ergebnismenge angeben können, kann es für andere durchaus hilfreich sein, eine eher komplex formulierte Ergebnismenge zu notieren.

8 Das Einzeichnen von Trennstrichen beim Glücksrad macht ein „Nicht-Laplace-Experiment“ zu einem „Laplace-Experiment“

Doch sind die zu betrachtenden Ergebnisse beim Drehen des Glücksrads aus Abb. 10 nicht bereits dadurch eindeutig festgelegt, dass der Zeiger eben auf einem der acht Felder stehen bleibt – wie auch immer man diese genau beschreiben oder charakterisieren möchte (z. B. anhand der Farbe oder der Nummerierung)? Die weiteren Glücksradvarianten in Abb. 12 zeigen, dass man auch bei dieser Vorgehensweise (jedes Feld kennzeichnet ein Elementarereignis) an Grenzen stoßen kann. Während sich bei Glücksrad A die Betrachtung der Ergebnismenge $\Omega_1 = \{\text{weiß; grau; schwarz}\}$ oder der Ergebnismenge $\Omega_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ quasi aufdrängt, verliert man bei Glücksrad B durch das Entfernen der Nummerierung eine einfach handhabbare Unterscheidung der acht Felder. Nun stehen nur noch die Farben im Vordergrund und diesbezüglich die Betrachtung der Ergebnismenge Ω_1 . Allerdings sind weiterhin acht Felder sichtbar, die ebenfalls für die Ergebnisse stehen könnten. Lediglich die Notation einer entsprechenden Ergebnismenge wird durch das Entfernen der Zahlen erschwert. Jedoch könnte man zur Kennzeichnung der Ergebnisse durchaus auf Beschreibungen wie „graues Feld neben dem schwarzen Feld“ oder „mittleres Feld der fünf weißen Felder“ zurückgreifen oder die Felder gedanklich durchnummerieren. Trotzdem ist in diesem Beispiel vermutlich für viele Lernende und auch Lehrkräfte eine Modellierung, die zum Schluss „Nicht-Laplace-Experiment“ führt, naheliegender als eine Modellierung, die zum Schluss „Laplace-Experiment“ führt, da man bei der Beschreibung der Ergebnismenge wohl eher zur Ergebnismenge Ω_1 tendiert als zu einer komplexeren Formulierung, die in einer genauen Charakterisierung jedes einzelnen der acht Felder mündet. Es hängt aber auch hier die optimale Formulierung der betrachteten Ergebnismenge wieder davon ab, welche Fragestellungen anschließend beantwortet werden sollen.

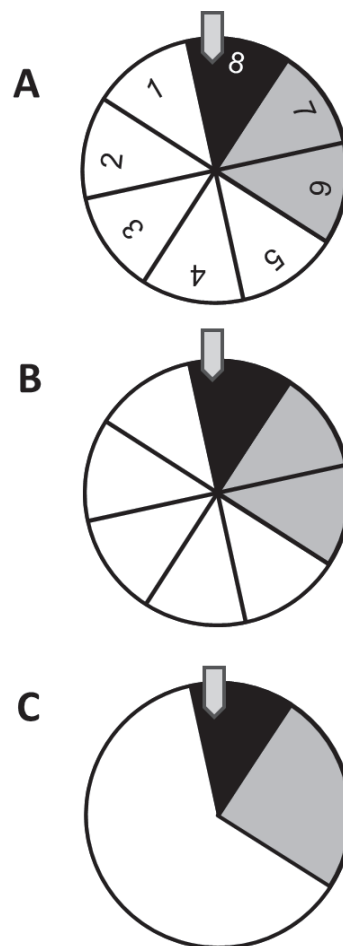


Abb. 12: Weitere Glücksradvarianten zur Frage: „Laplace-Experiment oder Nicht-Laplace-Experiment?“

Eine unterrichtlich wertvolle Diskussion zur Rolle der Modellbildung könnte beispielsweise wie folgt aussehen: Wählt man die Ergebnismenge Ω_1 , so kann nicht von gleichwahrscheinlichen Ergebnissen ausgegangen werden. Aber durch eine Änderung der Ergebnismenge auf Ω_2 , die als weitere Ausdifferenzierung von Ω_1 angesehen werden kann, kann die nicht gegebene Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse „korrigiert“ werden. Dieses Wechselspiel von Ergebnismenge und Wahrscheinlichkeiten kann im Unterricht herausgearbeitet werden, um zu verdeutlichen, dass durch eine geschickte Formulierung der Ergebnismenge Experimente, die im ersten Moment nicht als Laplace-Experiment wirken, auf Laplace-Experimente zurückgeführt werden können (vgl. auch Egert-Oostingh, Borovcnik & Fuchs, 2017). Gemäß Schweiger (2010) handelt es sich bei dieser Art des „Umdefinierens“ um eine Schlüsselfertigkeit in der Mathematik und gar um eine fundamentale Idee.

Vergleicht man die Glücksräder B und C (Abb. 12), so wird der fließende Übergang zwischen „Laplace-Experiment“ und „Nicht-Laplace-Experiment“ noch deutlicher. Während bei Glücksrad B weiterhin jedes der acht Felder zur Kennzeichnung eines Elementarereignisses herangezogen werden kann (auch wenn

die einzelnen Felder dazu gedanklich durchnummeriert oder umständlich beschrieben werden müssen), fällt es bei Glücksrad C merklich schwerer, eine Modellierung zu finden, die zum Schluss „Laplace-Experiment“ führt. Eine Möglichkeit hierzu ergibt sich beispielsweise anhand der (nachträglichen) Unterteilung von Glücksrad C in geeignete Sektoren durch das Einzeichnen von Trennstrichen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass sich durch die gezielte Variation *eines* Zufallsexperiments oftmals tiefere Einblicke in Zusammenhänge eröffnen als durch eine Aneinanderreihung vieler flüchtiger Betrachtungen bei unterschiedlichen Zufallsexperimenten. Ein fließender Übergang von a-priori hin zu a-posteriori-Überlegungen ergibt sich auch, wenn nicht mehr flach auf einem ebenen Tisch liegende Glücksräder betrachtet werden, sondern schief gestellte (Riemer, 2017). Bei den betreffenden Glücksrädern, bei denen sich der Zeiger anstelle der Scheibe dreht, ändert sich zwar nicht die Ergebnismenge, sehr wohl aber die Wahrscheinlichkeiten, die den Ergebnissen zugeordnet werden sollten.

9 Kartenspiele und Spielwürfel

Möchte man mit Schülerinnen und Schülern Aspekte der Modellbildung bei Zufallsexperimenten in den Mittelpunkt des Unterrichts stellen, bietet es sich an, solche Zufallsexperimente auszuwählen, die reichhaltige Diskussionsanlässe bieten. Beispielsweise ist – wie zuvor dargestellt – bei Glücksrädern ein nahezu fließender Übergang möglich zwischen Modellierungen, die zum Schluss „Laplace-Experiment“ führen, und Modellierungen, die zum Schluss „Nicht-Laplace-Experiment“ führen.

Natürlich eignen sich zur Thematisierung von Aspekten der Modellbildung auch andere Zufallsexperimente, wie zum Beispiel das Ziehen einer Karte aus einem Stapel an Spielkarten: Liegt der Fokus auf dem *Wert* der gezogenen Karte, ihrer *Farbe* oder gar auf beidem? Geht es darum, ob die Karte einen *Knick* hat bzw. anderweitig gekennzeichnet ist oder nicht? Oder liegt das Augenmerk vielleicht darauf, ob auf der Vorderseite der Karte eine *Figur abgebildet* ist (Unter, Ober oder König im deutschen Blatt) oder nicht? Grundsätzlich ist es naheliegend, im Rahmen der Modellbildung eine Ergebnismenge zu betrachten, bei der jede einzelne Spielkarte im Stapel jeweils ein Ergebnis repräsentiert. Aber welches Merkmal man letztlich zur konkreten Charakterisierung heranzieht, sollte – bei einer modellierungsoffenen Sichtweise – wiederum von den Fragestellungen abhängen, die man anschließend beantworten möchte. Bei der deterministischen Sichtweise ist die Ergebnismenge hingegen eindeutig festgelegt durch die Er-

gebnismenge, deren Mächtigkeit der Anzahl der Karten im Stapel entspricht. Diese hat bei der modellierungsoffenen Sichtweise zwar eine hervorgehobene Stellung, ist aber eben nicht die einzige mögliche Ergebnismenge.

Auch in Bezug auf das Werfen eines Spielwürfels lassen sich Aufgabenstellungen finden, die sowohl zu Modellierungen anregen, die zum Schluss „Laplace-Experiment“ führen, als auch zu Modellierungen, die zum Schluss „Nicht-Laplace-Experiment“ führen.

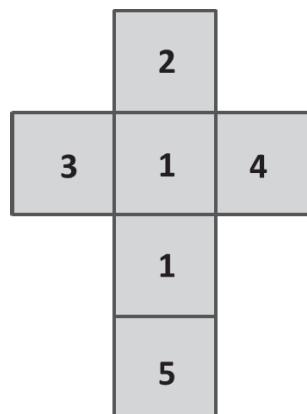


Abb. 13: Würfelnetz, das sowohl zu Modellierungen anregt, die zum Schluss „Nicht-Laplace-Experiment“ führen, als auch zu Modellierungen, die zum Schluss „Laplace-Experiment“ führen

Beispielsweise liegt beim Würfelnetz in Abb. 13 die Betrachtung der Ergebnismenge $\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ beim einmaligen Werfen nahe. Eine Annahme gleicher Wahrscheinlichkeiten würde vermutlich nicht erfolgen, da die Zahl 1 auf zwei Flächen steht, wohingegen alle anderen Zahlen nur jeweils auf einer Fläche stehen. Der sich ergebende Schluss wäre „Nicht-Laplace-Experiment“. Wird aber als Ergebnismenge $\Omega_2 = \{1 \text{ gegenüber der } 5; 1 \text{ gegenüber der } 2; 2; 3; 4\}$ betrachtet, so sind die beiden mit „1“ gekennzeichneten Flächen *unterscheidbar*, die Annahme gleicher Wahrscheinlichkeiten für jede einzelne der sechs Flächen liegt nahe und es ergibt sich bei dieser alternativen Betrachtung der Schluss „Laplace-Experiment“. Der entscheidende Vorteil ist, dass nun jedem Ergebnis eine konkrete Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann, nämlich die Laplace-Wahrscheinlichkeit $1/6$.

Nach dem Würfelbeispiel aus Abb. 13 könnte man in Versuchung kommen zu vermuten, dass ganz allgemein nicht weiter zerlegbare Ergebnisse vorteilhaft sind, weil sie immer eine Laplace-Modellierung erlauben. Das Glücksrad in Abb. 14 zeigt jedoch, dass auch eine bewusste Formulierung einer Ergebnismenge mit nicht maximal möglicher Mächtigkeit eine Modellierung als Laplace-Experiment überhaupt

erst erlauben kann. Betrachtet man hingegen als atomare Ergebnisse die fünf Felder des Glücksrads (und nummeriert diese – entsprechend der deterministischen Sichtweise – gedanklich durch), kann nicht jedem der Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.

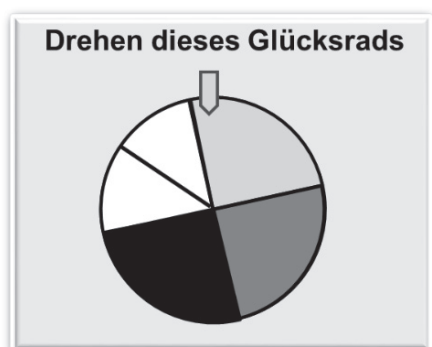


Abb. 14: Zufallsexperiment, das bei der Betrachtung der Farben als Laplace-Experiment interpretiert werden kann, aber nicht bei der Betrachtung der fünf einzelnen Felder

10 Fazit

Bei den meisten Zufallsexperimenten kann – entsprechend einer modellierungsoffenen Sichtweise – nicht pauschal angegeben werden, ob es sich um ein Laplace-Experiment handelt oder nicht. Bei einer modellierungsoffenen Sichtweise erlaubt erst die Kombination von konkreter Ergebnismenge und zugeordneten Wahrscheinlichkeiten eine entsprechende Kategorisierung in „Laplace-Experiment“ oder „Nicht-Laplace-Experiment“. Diese Erkenntnis kann und sollte unterrichtlich genutzt werden, um Schülerinnen und Schüler dafür zu sensibilisieren, dass bei einem Zufallsexperiment oftmals unterschiedliche Modellierungen vorgenommen werden können, von denen manche zum Schluss „Laplace-Experiment“ führen, andere hingegen nicht. Wählt man im Stochastikunterricht bewusst solche Zufallsexperimente aus, die ein ganzes Spektrum an unterschiedlichen Modellierungen ermöglichen, können fruchtbare Diskussionen entstehen, welche bei Schülerinnen und Schülern zu einem besseren Verständnis der Rolle der Modellbildung bei Zufallsexperimenten beitragen können.

Alternativ ist natürlich auch ein Stochastikunterricht entsprechend der deterministischen Sichtweise möglich, auch wenn dies unserer Ansicht nach eher nachteilig erscheint, weil dadurch fruchtbare Diskussionsanlässe zur Rolle der Modellbildung verloren gehen.

Zahlreiche Schulbuchbeispiele verfolgen die deterministische Sichtweise (z. B. durch Formulierungen wie „Gib die Ergebnismenge an.“). Diese Sichtweise eignet sich insbesondere bei solchen Zufallsexperi-

menten, bei denen die Mächtigkeit der Ergebnismenge klar erkennbar ist, wie dem Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit unterschiedlich bezeichneten und/oder eingefärbten Kugeln oder dem Drehen an einem Glücksrad mit gleich großen Sektoren, die wiederum alle unterschiedlich bezeichnet und/oder eingefärbt sind. Nicht mehr ganz so trivial ist diese Sichtweise hingegen, wenn die Kugeln oder gleich großen Sektoren nicht mehr alle unterschiedlich bezeichnet und/oder eingefärbt sind. An Grenzen der Modellbildung hinsichtlich der Frage „Laplace-Experiment oder nicht?“ stößt man mit der deterministischen Sichtweise schließlich bei Glücksrädern wie d) in Abb. 15.

Als problematisch sehen wir letztlich Konzepte an, bei denen nicht eine der beiden Sichtweisen konsistent beibehalten wird (v. a. auch in Aufgaben), insbesondere dann, wenn sich dadurch (offensichtliche) inhaltliche Widersprüche ergeben. Ein Beispiel hierfür liefern aus dem selben Buch stammende Schulbuchauszüge (Lernstufen Mathematik R9, Bayern, 2021) in Abb. 15 und 16.

Mit welchem Glücksrad kann man ein Laplace-Experiment durchführen? Begründe.

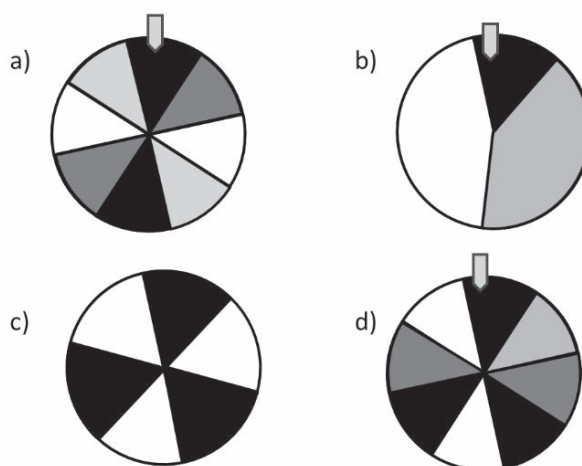


Abb. 15: Aufgabe zu Laplace-Experimenten aus einem Schulbuch

Die erwartete Lösung der Aufgabe aus Abb. 15 ist für Schülerinnen und Schüler auf den letzten Seiten des Buches einsehbar: Nur mit den Glücksrädern a) und c) könne man – laut Schulbuch – ein Laplace-Experiment durchführen. Mit Glücksrad b) und d) hingegen nicht. Begründet wird dies bei Glücksrad d) damit, dass die einzelnen Farben nicht gleich oft vorkommen.

Auf der gleichen Doppelseite dieses Schulbuchs findet sich nun allerdings ein zu Glücksrad d) sehr ähnliches Glücksrad (vgl. Abb. 16, angelehnt an Lernstufen Mathematik R9, Bayern 2021), bei dem ebenfalls die einzelnen Farben nicht gleich oft vorkommen.

Beispiel: Berechne zum Glücksrad die Wahrscheinlichkeit für „grau“. Es sind 5 Felder günstig. Insgesamt sind es **8 gleich große Felder**. Deshalb ist das Drehen ein Laplace-Experiment.

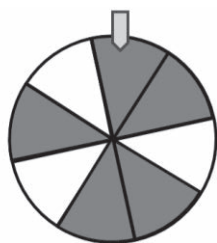


Abb. 16: Beispielaufgabe zu Laplace-Experimenten aus demselben Schulbuch – die Argumentation ist konträr zur erwarteten Lösung der Aufgabe aus Abb. 15

Beim betreffenden Glücksrad wird nun aber argumentiert, das Drehen des Glücksrads sei (doch) ein Laplace-Experiment. Als Begründung wird angeführt, dass es acht gleich große Felder gibt. Dass die einzelnen Farben nicht gleich oft vorkommen, scheint nun also nicht mehr problematisch zu sein. Anders ausgedrückt: In der Aufgabe aus Abb. 15 ist ein gedankliches Durchnummerieren der Felder bei Glücksrad d) nicht erlaubt, wohingegen dieses gedankliche Durchnummerieren beim Glücksrad in Abb. 16 zwingend erforderlich ist. Inkonsistenzen dieser Art dürften für Lehrkräfte und Schülerinnen und Schüler gleichermaßen frustrierend sein und für Verwirrung sorgen.

Im betreffenden Schulbuch wird bei den Aufgaben aus Abb. 15 und Abb. 16 jeweils die deterministische Sichtweise eingenommen, bei der nur *eine* mögliche Ergebnismenge zugelassen wird. Jedoch wird nicht konsistent vertreten, *welche* Ergebnismenge das genau ist. Einige Seiten später im Abschnitt „Teste dich“ findet sich dann in diesem Schulbuch sogar eine modellierungsoffene Sichtweise in einer Aufgabe, die verlangt, *verschiedene* mögliche Ergebnismengen für ein- und dasselbe Zufallsexperiment zu notieren. Diese (unkommentierte) Vermischung von deterministischer und modellierungsoffener Sichtweise dürfte sowohl für Schülerinnen und Schüler als auch für Lehrkräfte irritierend sein.

Das Schulbuchbeispiel verdeutlicht, wie wichtig es für Lehrkräfte folglich ist, sich darüber bewusst zu sein, dass es zwei unterschiedliche Sichtweisen gibt, und sich entweder für eine modellierungsoffene Sichtweise oder (alternativ) die deterministische Sichtweise zu entscheiden und diese konsistent beizubehalten. Das Hintergrundwissen, dass es Aufgaben gibt, die eher eine modellierungsoffene Sichtweise oder die deterministische Sichtweise widerspiegeln, kann helfen, um Aufgaben für den Unterricht bewusst auszuwählen oder gegebenenfalls passend umzuformulieren, so dass keine inhaltlichen Widersprüche – wie im gezeigten Beispiel – entstehen.

Fußnoten

¹ Im vorliegenden Artikel wird der Begriff „Laplace-Experiment“ kritisch diskutiert. Doch auch der Begriff „Zufallsexperiment“ hat bereits zu kontroversen Diskussionen geführt. Als alternative Formulierung und zur Abgrenzung von Experimenten aus den Naturwissenschaften wurde hier beispielsweise die alternative Verwendung des Begriffs „Zufallsvorgang“ vorgeschlagen (siehe z. B. Sill, 2010). Der Begriff „Zufallsexperiment“ ist aus mathematischer Perspektive nicht zum Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie notwendig.

² Wir verwenden den Begriff *Ergebnismenge*, da er keine Verwechslungsgefahr mit dem Begriff *Wahrscheinlichkeitsraum* mit sich bringt und zur betreffenden Darstellung der möglichen Ergebnisse (als Menge in aufzählender Form) passt. Darüber hinaus lässt sich der Begriff *Ereignis* als eine *Teilmenge* direkt an *Ergebnismenge* anbinden.

³ In Übereinstimmung mit Krüger, Sill und Sikora (2015) bevorzugen wir den Begriff „Ergebnis“ statt „Elementarereignis“ für die Schule.

⁴ Die Darstellung der Ergebnismenge $\Omega_2 = \{\text{grau; grau; schwarz; schwarz; schwarz}\}$ wäre aus mengentheoretischer Sichtweise identisch zur Darstellung $\Omega_2 = \{\text{grau; schwarz}\}$.

Literatur

- Baum, D., Klein, H., & Schmid, T. (2021). *Pythagoras Mathematik, Realschule Bayern*. Cornelsen.
- Dehling, H., & Haupt, B. (2006). *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Springer-Verlag.
- Deeg, A., Engelstätter, C., Geus, C., Hafner, D., König, C. Lür, D., Müller, P., Pohmann, J., & Schäbel, D. (2021). *Lernstufen Mathematik R9*, Bayern. Cornelsen.
- Blum, W., & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der Tanken“-Aufgabe. *mathematik lehren*, 128, 18-21.
- Büchter, A., & Henn, H. W. (2007). *Wahrscheinlichkeitsrechnung. Elementare Stochastik: Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls*, 155-392.
- Eichler, A., & Vogel, M. (2009). *Leitidee Daten und Zufall*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
- Fahrmeir, L., Heumann, C., Künstler, R., Pigeot, I., & Tutz, G. (2016). *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. In *Statistik* (S. 165-207). Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg.
- Georgii, H. O. (2015). *Stochastik*. de Gruyter.
- Henze, N. (2021). Stochastische Vorgänge, Ergebnismengen. In *Stochastik für Einsteiger* (S. 1-4). Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg.
- Krengel, U. (2000). *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Braunschweig: Vieweg.

- Krüger, K., Sill, H. D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Kütting, H., & Sauer, M. J. (2011). *Elementare Stochastik: Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte*. Springer-Verlag.
- Mittag, H. J., & Schüller, K. (2020). Zufall und Wahrscheinlichkeit. In: J. Mittag und K. Schüller: *Statistik – Eine Einführung mit interaktiven Elementen* (S. 159-182). Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg.
- Engert-Oostingh, I., Borovcnik, M., & Fuchs, K. J. (2017). Stochastik spielend unterrichten. *Mathematik im Unterricht*, 115.
- Riemer, W. (2017). Das Glücksrad auf der schiefen Ebene. *Mathe aus dem Leben–für das Leben. Festschrift*, 40.
- Schilling, J., & Krüger, K. (2022). Die Rolle von Baumdiagrammen bei der Bearbeitung stochastischer Probleme. *Stochastik in der Schule*, 42(2).
- Schmid, A., & Weiding, I. (2009). *Lambacher Schweizer 8, Mathematik für Gymnasien – Bayern*. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, Leipzig.
- Schweiger, F. (2010). *Fundamentale Ideen*. Aachen: Shaker.
- Sill, H.-D. (2010). Zur Modellierung zufälliger Entscheidungen. *Stochastik in der Schule*, 30(3), 2-13.

Anschrift der Verfasser

Karin Binder
Didaktik der Mathematik
Ludwig-Maximilians-Universität München
Theresienstraße 39
80333 München
Karin.Binder@lmu.de

Stefan Krauss
Didaktik der Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstraße 31
93053 Regensburg
Stefan.Krauss@ur.de

Simon Weixler
Didaktik der Mathematik
Ludwig-Maximilians-Universität München
Theresienstraße 39
80333 München
Simon.Weixler@lmu.de